

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳՐԱԴԱՐԱՆԱԿԱՆ, ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՄՊՈՂՏԻ ԱՄՍԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ  
ՀԱՅ-ՈՒՌՄԱԿԱՆ ՀԱՍԱԼՍԱՐԱՆ

ՄԿՐՏՅԱՆ ՄՀԵՐ ԱՐԹՈՒՐԻ

ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԿԵՏԵՐՈՒՄ ՄԻ ՔԱՆԻ ՄԱՍԻԿԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ  
ԹԵՐՄՈԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ և ՕՊՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՏՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ  
ՈՒՍՈՒՄԱՄԻՐՈՒՄԸ

Ա.04.10 – «Կիսահաղորդիչների ֆիզիկա» մասնագիտությամբ  
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի  
հայցման ատենախոսություն

Ս Ե Ղ Ս Ս Գ Ի Դ

ԵՐԵՎԱՆ – 2023

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ, КУЛЬТУРЫ И СПОРТА РА  
РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МКՐԴՉՅԱՆ ՄԵՐ ԱՐԴՐՈՎԻՉ

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ И ОПТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ  
НЕСКОЛЬКОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ В КВАНТОВЫХ ТОЧКАХ

ԱՎՏՐԵՓԵՐԱՏ

диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности 01.04.10– «Физика  
полупроводников»

ԵՐԵՎԱՆ – 2023

Աստեղագիտության բնական հաստատվել է Հայ-Ռուսական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ ֆ.վ.գ.դ., պրոֆեսոր, Հ.Ա. Սարգսյան  
Պաշտոնական ընդդիմականներ  
ֆ.վ.գ.դ., պրոֆեսոր Կ.Հ. Մաթևոսյան  
ֆ.վ.գ.թ., Հ.Ա. Զարարյան

Առաջատար  
կազմակերպություն՝ ՀՀ ԳԱԱ ֆիզիկական հետազոտությունների ինստիտուտ

Աստեղագիտության պաշտպանությունը տեղի կունենա ղեկավարների 28-ին, ժամը 12:30 հայ-ռուսական համալսարանի ֆիզիկայի 052 մասնագիտական խորհրդի նիստում: Հասցե՝ 0051, Երևան, Ղ. Էմին 123:

Աստեղագիտությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՌՀ գրադարանում:

Մեղմագիրը առարվան է 2023թ. նոյեմբերի 27-ին

Մասնագիտական խորհրդի  
գիտական քարտուղար՝  ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ  
Ի.Բ. Հայրապետյան

Тема диссертации утверждена в Российско-Армянском университете

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, профессор А.А. Саркисян  
Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук, профессор К.Г. Агаронян  
кандидат физ.-мат. наук, А.А. Захарян

Ведущая организация: Институт физических исследований НАН РА

Защита диссертации состоится 28-го декабря в 12:30 на заседании специализированного совета по физике 052 Российско-Армянского университета по адресу: 0051, Ереван, ул. О. Эммина 123.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке РАУ.

Автореферат разослан 27-го ноября 2023г.

Ученый секретарь  
специализированного совета  кандидат физ.-мат. наук, доцент  
Д.Б. Айрапетян

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность исследования

Изучение оптических и статистических свойства квантовых точек (КТ) продолжает оставаться в центре внимания исследований, так как результаты, полученные при решении различных задач, могут найти непосредственное приложение при конструировании полупроводниковых приборов нового поколения [1 – 5].

С теоретической точки зрения исследование оптических, термодинамических и магнитных характеристик квантовых точек представляется комплексной задачей, учитывающей, с одной стороны, геометрию исследуемой КТ, а с другой одночастичный или же многочастичный характер описания вышеуказанных физических параметров [6 – 10].

Многочастичный или же несколькочастичный газы могут рассматриваться как статистические ансамбли частиц, характеризующиеся такими термодинамическими параметрами как: свободная энергия, средняя энергия, энтропия и теплоемкость. Ясно, что на первом этапе необходимо рассмотреть сравнительно простую модель слабо взаимодействующего газа частиц, когда применимо одночастичное приближение. Статистическая сумма в этом случае может быть вычислена аналитически точно [11 – 15]. С другой стороны, учет межчастичного взаимодействия может существенным образом повлиять на все термодинамические свойства системы. При этом, проблема взаимодействующего газа в КТ довольно сложная задача, но есть примеры точно решаемых моделей с парным взаимодействием между частицами. Одной из таких моделей является атом Мошинского [16]. Первоначально эта модель была предложена для описания поведения нуклонов в ядрах. Рассматривая систему парно-взаимодействующих нуклонов в ограниченной области ядра, Мошинский предположил, что частицы взаимодействуют друг с другом по гармоническому закону, а система находится в параболической яме. Позднее Джонсон и Пейн показали, что в случае двумерной параболической КТ наличие осцилляционного парного взаимодействия между электронами позволяет точно диагонализировать  $N$ -частичный гамильтониан в присутствии аксиального магнитного поля [17]. Следует отметить, что термодинамические свойства КТ с нетривиальной геометрией при учете межчастичного взаимодействия изучены в сравнительно небольших объемах. Поэтому возникает интерес к более детальному исследованию поведения термодинамических параметров взаимодействующего газа в КТ.

Наряду с термодинамическими характеристиками большой интерес представляют и оптические свойства КТ содержащих несколько-частичный электронный или дырочный газ. Ряд экспериментов показал, что в КТ могут реализовываться интересные коллективные оптические эффекты. Ярким примером сказанного является обобщение теоремы Кона для случая параболических КТ [18 – 20]. Вместе с тем реализация параболического потенциала ограничения может возникнуть благодаря специфической геометрии КТ и, в частности, эллипсоидальной или линзообразной. Ранее в [21]

теоретически была предсказана возможность реализации обобщенной теоремы Кона для сильно-сплюснутых эллипсоидальных КТ. Далее данная теорема была обобщена для случая линзообразной КТ [22] и экспериментально подтверждена для случая газа тяжелых дырок в Ge/Si КТ [9].

### Цель работы

Целью диссертационной работы является:

- В одночастичном приближении изучение межзонного и внутризонного магнетопоглощения в сильно-сплюснутой двояковыпуклой асимметричной линзообразной КТ.
- Исследование внутризонного поглощения в сильно-сплюснутой линзообразной КТ содержащей парно-взаимодействующий несколькочастичный газ электронов (дырок).
- В рамках одномерной модели Мошинского исследование длинноволнового оптического поглощения в сильно-вытянутой эллипсоидальной КТ.
- Изучение термодинамических характеристик парно-взаимодействующего дырочного газа в сильно-вытянутой эллипсоидальной и сильно-сплюснутой линзообразной КТ.

### Научная новизна

1. В рамках адиабатического метода исследовано линейное и нелинейное магнетопоглощения в сильно-вытянутой эллипсоидальной и сильно-сплюснутой линзообразной КТ. Получены коэффициенты межзонного и внутризонного поглощений, а также выявлены правила отбора для соответствующих переходов.
2. В рамках одномерной модели атома Мошинского получен точный вид энергетического спектра и волновых функций электронного (дырочного) газа в сильно-вытянутой эллипсоидальной КТ. Показана возможность реализации обобщенной теоремы Кона в такой структуре.
3. В рамках двумерной модели атома Мошинского получен точный вид энергетического спектра и волновых функций парно-взаимодействующего электронного (дырочного) газа в сильно-сплюснутой линзообразной КТ. Показана возможность реализации обобщенной теоремы Кона в такой структуре.
4. Изучены термодинамические характеристики (средняя энергия, свободная энергия, энтропия и теплоемкость) парно-взаимодействующего дырочного газа в сильно-вытянутой эллипсоидальной и сильно-сплюснутой линзообразной КТ. Найден фазовый переход первого рода при изменении геометрии КТ.

### Научная и практическая ценность

Полученные в диссертации результаты, помимо академического интереса, имеют также практическое значение. На сегодняшний день КТ рассматриваются в качестве перспективных кандидатов на роль элементной базы

для приборов нового поколения. В частности, низкотемпературные лазеры, светодиоды на основе КТ и т.д. На основе анализа спектров поглощения и излучения изучаемых систем можно получить информацию об их зонном строении, а также дисперсии по их геометрическим размерам.

### Основные научные положения, выносимые на защиту

1. Влияние магнитного поля приводит к синему смещению резонансных частот межзонного поглощения в сильно-сплюснутой линзообразной КТ. Имеют место следующие правила отбора:  $n_r \rightarrow n'_r$ ,  $m \rightarrow -m'$ ,  $n_z \rightarrow n'_z$ .
2. Модель Мошинского позволяет дать точные аналитические выражения для волновых функций и энергетического спектра парно-взаимодействующего дырочного газа в сильно-вытянутой эллипсоидальной и сильно-сплюснутой линзообразной Ge/Si КТ, а также позволяет в явной форме продемонстрировать реализацию обобщенной теоремы Кона, в таких структурах.
3. Учет межчастичного взаимодействия приводит к возникновению дополнительной упорядоченности в дырочном газе, и, соответственно уменьшению энтропии системы, с одной стороны и росту средней энергии дырочного газа, с другой.
4. При переходе от асимметричной модели, сильно-сплюснутой линзообразной КТ к симметричной, когда  $h_1 = h_2$ , дырочный газ претерпевает фазовый переход первого рода.

**Апробация работы.** Основные результаты, полученные в данной диссертационной работе, обсуждались во время научных семинаров кафедры Общей физики и квантовых наноструктур Инженерно-физического института РАН, а также докладывались на следующих локальных и международных научных конференциях:

- 14-я Годичная научная конференция, РАН 2019.
- International Youth Conference on Electronics, Telecommunications and Information Technologies, SPBSTU 2020.
- International Youth Conference on Electronics, Telecommunications and Information Technologies, SPBSTU 2021.
- Joint International Conference on Astrophysics for Young Scientists, Вуракан 2021.
- XXIII Всероссийская молодежная конференция по физике полупроводников и наноструктур, полупроводниковой опто- и наноэлектронике, Санкт-Петербург 2021.
- 15-я Годичная научная конференция, РАН 2021.

**Публикации.** По теме диссертации опубликованы 5 работ и приняты к печати 2. Список приводится в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка используемой литературы. Текст изложен на 101 странице и содержит 45 рисунков, 2 таблицы и 93 наименований литературы.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении представлен обзор научной литературы по теме диссертационной работы. Представлены последние работы по исследованию оптических и термодинамических характеристик КТ. Сформулированы цели диссертации и приведены ее основные положения.

Первая глава диссертационной работы посвящена изучению межзонных и внутризонных оптических переходов в сильно-сплюснутой двояковыпуклой асимметричной линзообразной КТ, как в присутствии, так и в отсутствии внешнего аксиального магнитного поля.

В параграфе 1.1 приведен обзор литературы, посвященной изучению одночастичных состояний и оптическим эффектам в линзообразных КТ.

В параграфе 1.2 рассматриваются межзонные оптические переходы в сильно-сплюснутой двояковыпуклой асимметричной линзообразной КТ *InAs* (Рис. 1).

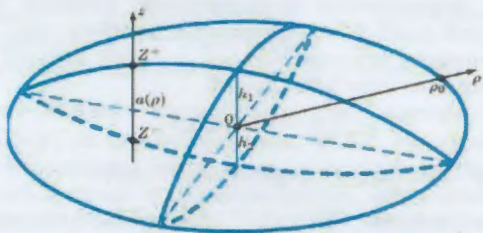


Рис. 1. Сильно-сплюснутая двояковыпуклая асимметричная линзообразная КТ

Специфика геометрии задачи (сильная сплюснутость в аксиальном направлении) позволяет нам использовать адиабатическое приближение для решения задачи, где в качестве быстрой подсистемы выступает движение вдоль аксиального направления, а в качестве медленной – движение вдоль радиального. Для полной энергии имеем

$$E = \hbar\Omega_{n_z=1} \left( 2n_\rho + m + \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi^2 \hbar^2 n_z^2}{2m^* (h_1 + h_2)^2}, \quad (1)$$

а для волновой функции

$$f(\rho, \varphi, z) = \sqrt{\frac{2}{a(\rho)}} e^{im\varphi} \rho^{|m|} e^{-\frac{\lambda \rho^2}{2}} {}_1F_1(-n_\rho, |m|+1; \lambda \rho^2) \sin\left(\frac{\pi n_z}{a(\rho)} (z + \sqrt{R_1^2 - \rho^2} + h_2 - R_2)\right), \quad (2)$$

где  $a(\rho) = \sqrt{R_1^2 - \rho^2} + \sqrt{R_2^2 - \rho^2} + (h_1 + h_2) - (R_1 + R_2)$  - ширина одномерной квантовой ямы,  $R_1, R_2$  - радиусы пересечения двух сфер, образующих КТ,  $h_1, h_2$  - высоты

КТ,  $n_z = 1, 2, 3, \dots$  - аксиальное квантовое число,  $\Omega_{n_z}^2 = \frac{R_1 + R_2}{(m^*)^2 (h_1 + h_2)^3 R_1 R_2} \pi^2 \hbar^2 n_z^2$ ,

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  - магнитное квантовое число,  $n_\rho = 0, 1, 2, \dots$  - радиальное квантовое число,  $\lambda = \frac{m^* \Omega_{n_z=1}}{\hbar}$ ,  ${}_1F_1(a, b; c)$  - вырожденная гипергеометрическая функция первого рода.

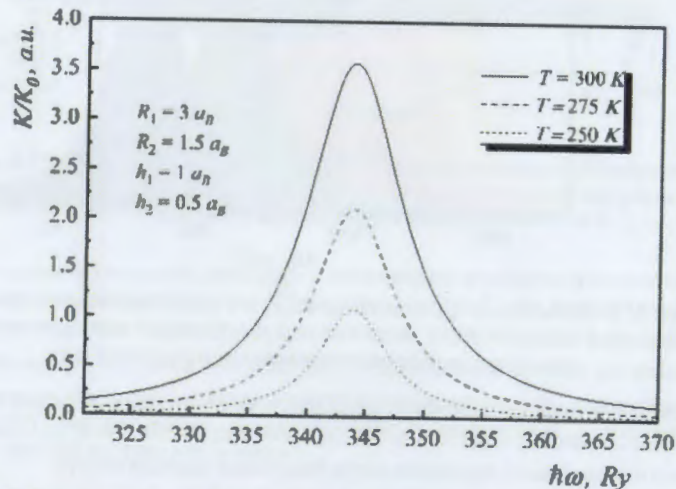


Рис. 2. Зависимость коэффициента межзонного оптического поглощения от энергии фотонов падающего света для диагональных переходов из состояний тяжелых дырок в электронные состояния  $|0, 0, 2\rangle \rightarrow |0, 0, 2\rangle$

На Рис.2 показаны зависимости коэффициента межзонного оптического поглощения от энергии фотонов падающего света, для диагональных переходов  $|m, n_\rho, n_z\rangle \rightarrow |m', n'_\rho, n'_z\rangle$ . Расчеты сделаны в режиме сильного размерного квантования, когда кулоновским взаимодействием между электроном и дыркой можно пренебречь. Учет температурной зависимости приводит к росту пиков поглощения с ростом температуры.

В параграфе 1.3 исследованы межзонные и внутризонные оптические переходы в линзообразной КТ *InAs* (Рис.1) во внешнем аксиальном магнитном поле. Для энергетического спектра имеем

$$E = \hbar\Omega (2n_\rho + |m| + 1) + \frac{\pi^2 \hbar^2 n_z^2}{2m^* (h_1 + h_2)^2} + \frac{m\hbar\omega_H}{2}, \quad (3)$$

а для волновой функции

$$f(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi} \sqrt{\frac{2}{a(\rho)}} \rho^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda \rho^2}{2}} |F_1(-m, -m+1; \lambda \rho^2)| \sin\left(\frac{\pi n_z}{a(\rho)} (z + \sqrt{R_2^2 - \rho^2} + h_2 - R_2)\right), \quad (4)$$

где  $\omega_H$  - циклотронная частота.

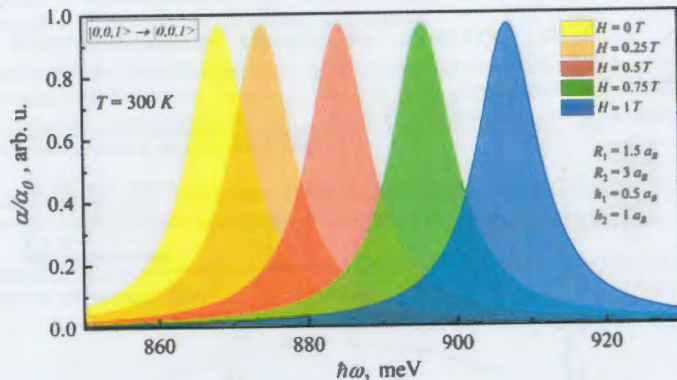


Рис. 3. Зависимость коэффициента межзонного оптического поглощения (при комнатной температуре) от энергии фотонов падающего света при различных значениях напряженности внешнего магнитного поля.

На Рис.3 показана зависимость коэффициента межзонного поглощения от энергии фотонов падающего света для следующих переходов  $|m, n_\rho, n_z\rangle \rightarrow |m', n'_\rho, n'_z\rangle$ . Расчеты показывают, что имеют место следующие правила отбора

$$\begin{cases} m \rightarrow -m' \\ n_z \rightarrow n'_z \\ n_\rho \rightarrow n'_\rho \end{cases}, \quad (5)$$

Из рисунка видно, что магнитное поле приводит к синему смещению пиков поглощения, так как растет межуровневое расстояние между уровнями дырок и электронов с ростом магнитного поля.

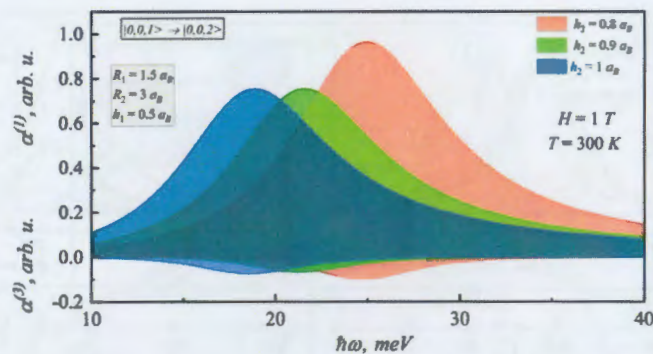
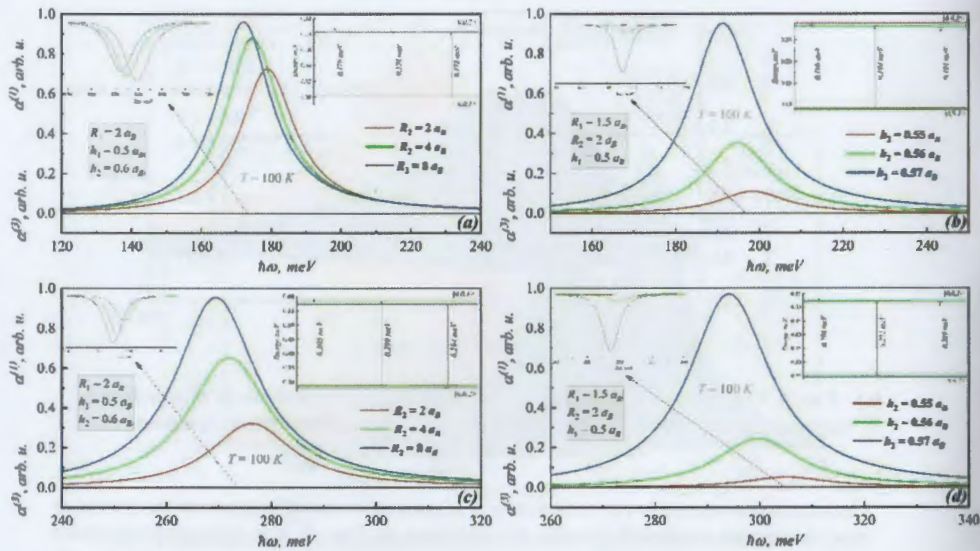


Рис. 4. Спектральная зависимость коэффициентов линейного и нелинейного внутризонных переходов от энергии фотонов падающего света при различных значениях высоты линзообразной КТ

Спектральная зависимость линейного и нелинейного коэффициентов поглощения для различных значений высоты КТ показана на Рис. 4, для зависимостей были выбраны следующие значения для интенсивности падающего света  $I = 1 \text{ kW} / \text{cm}^2$  и населённости электронов  $\sigma = 3 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . Расчеты были сделаны для комнатной температуры. Наблюдается синее смещение пиков поглощения при уменьшении высоты КТ, так как растет эффект размерного квантования, вследствие чего уровни энергии располагаются выше.

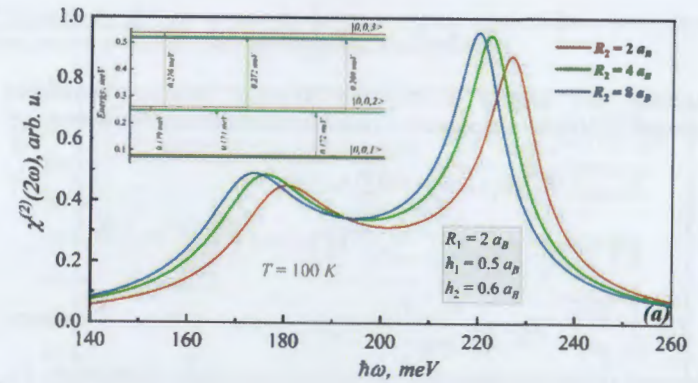
В параграфе 1.4 изучены внутризонные переходы тяжелых дырок в линзообразной КТ  $\text{Ge}_x\text{Si}_{1-x}$ .

В качестве материала квантовой точки нами были выбран раствор  $\text{Ge}_x\text{Si}_{1-x}$  где концентрация германия составляет порядка 60%, а концентрация кремния соответственно 40%. Эффективная масса тяжелых дырок в данном растворе была вычислена как  $m^* = x \cdot m_{Ge}^* + (1-x)m_{Si}^*$ , где  $m_{Ge}^* = 0.33m_0$  и  $m_{Si}^* = 0.49m_0$ .



**Рис.5.** Спектральная зависимость коэффициентов линейного и нелинейного поглощений от энергии фотонов падающего света (вставка: диаграмма переходов) для плотности электронов  $\sigma = 3 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ , интенсивности падающего света  $I = 10^5 \text{ Вт} / \text{ м}^2$ , показателя преломления  $n_r = 3.51$  и для перехода  $|0, 0, 1\rangle \rightarrow |0, 0, 2\rangle$  при различных значениях радиусов и высот КТ.

На Рис.5 представлены спектральные зависимости коэффициентов линейного и нелинейного внутризонного поглощений от энергии фотонов для различных радиусов линзообразной КТ. Прежде всего, следует отметить, что при данной интенсивности падающего света величина пиков нелинейного поглощения значительно меньше, чем линейная, поэтому в левом углу рисунка добавлена увеличенная версия коэффициента нелинейного поглощения. Как видно из зависимостей уменьшение радиуса КТ приводит к синему смещению пиков поглощения так как растет размерное квантование в радиальном направлении и уровни располагаются выше.



**Рис.6.** Спектральная зависимость коэффициента генерации второй гармоники от энергии фотонов падающего света (вставка: диаграмма переходов) для плотности электронов  $\sigma = 3 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ , интенсивности падающего света  $I = 10^5 \text{ Вт} / \text{ м}^2$ , показателя преломления  $n_r = 3.51$  и для перехода  $|0, 0, 1\rangle \rightarrow |0, 0, 2\rangle \rightarrow |0, 0, 3\rangle$  при различных значениях радиуса квантовой точки  $R_2$ .

На Рис.6 показана зависимость коэффициента генерации второй гармоники для различных радиусов линзообразной КТ. Как может быть видно из зависимостей для относительно маленьких КТ пики смещаются в сторону больших энергий, то есть мы наблюдаем синее смещение. Также отметим, что уменьшение радиуса КТ приводит к снижению интенсивности генерации второй гармоники, так как переходы между уровнями становятся менее вероятными.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию электронных и дырочных газов в сильно-вытянутой эллипсоидальной КТ и сильно-сплюснутой линзообразной КТ.

В параграфе 2.1 приведен обзор литературы, посвященной изучению оптических свойств неколлективных электронных (дырочных) газов в КТ.

В параграфе 2.2 рассматривается неколлективный парно-взаимодействующий электронный газ в сильно-вытянутой эллипсоидальной КТ. Исходя из геометрии задачи межчастичное взаимодействие рассматривается только в аксиальном направлении, так как в радиальном направлении размерное квантование существенно сильнее межчастичного взаимодействия. Согласно модели Мошинского [16 – 17] потенциал взаимодействия между частицами зависит от квадрата расстояния между частицами

$$V_{int}(1, \dots, N) = \sum_{i < j}^N \gamma (z_i - z_j)^2. \quad (6)$$

Выражения для энергии и волновой функции несколькочастичного парно-взаимодействующего электронного газа будут иметь следующий вид:

$$E_{n_{cm}, \{n_{rel}\}} = NE_0 + \hbar\Omega \left( n_{cm} + \frac{1}{2} \right) + \hbar\Omega \sum_{i=2}^N \left( n_{rel,i} + \frac{1}{2} \right) \quad (7)$$

$$\psi(Z, Z_i) = \frac{1}{\sqrt{2^{n_{cm}} n_{rel}!}} \left( \frac{1}{\pi} \right)^{1/4} e^{-Z^2/2} H_{n_{cm}}(Z) \prod_{i=2}^N \frac{1}{\sqrt{2^{n_{rel,i}} n_{rel,i}!}} \left( \frac{\tilde{\Omega}}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{\tilde{\Omega}}{2} Z_i^2} H_{n_{rel,i}}(\sqrt{\tilde{\Omega}} Z_i),$$

где  $\tilde{\Omega} = \sqrt{1 + \frac{2N\gamma}{\mu\Omega^2}}$ ,  $\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar\alpha_{1,0}}{\mu a c}$ ,  $a$  и  $c$  - малая и большая полуоси сильно-вытянутой эллипсоидальной КТ,  $\mu$  - эффективная масса электронов,  $\{n_{cm}, n_{rel,i}\}$  - квантовые числа движения центра масс и относительного движения, соответственно,  $E_0$  - энергия основного состояния.

Как видно из рисунка ниже, уровни центра масс и относительного движения образуют подзонную структуру. При этом, манипулируя большой и малой полуосями эллипсоидальной КТ мы можем управлять не только энергетическими уровнями, но и межуровневым расстоянием. Такой анализ энергетической диаграммы позволяет найти оптимальные параметры, чтобы в дальнейшем получить наиболее подходящие частотные интервалы поглощения для улучшения оптических свойств.

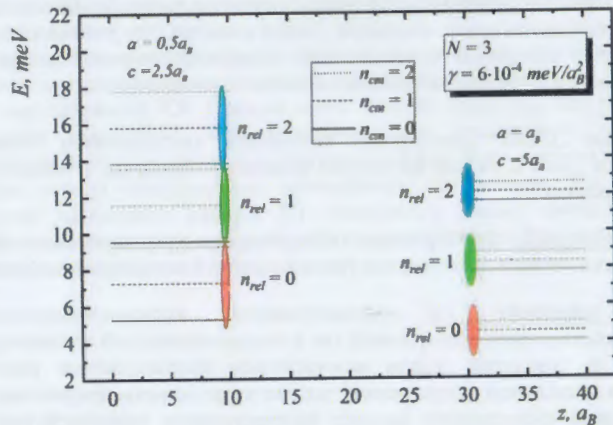


Рис. 7. Энергетическая диаграмма трехчастичного электронного газа, при следующих параметрах: I.  $a = 0.5a_B$ ,  $c = 2.5a_B$ , II.  $a = a_B$ ,  $c = 5a_B$ .

В параграфе 2.3, по аналогии с предыдущим параграфом, рассмотрен газ тяжелых дырок в сильно-вытянутой эллипсоидальной КТ.

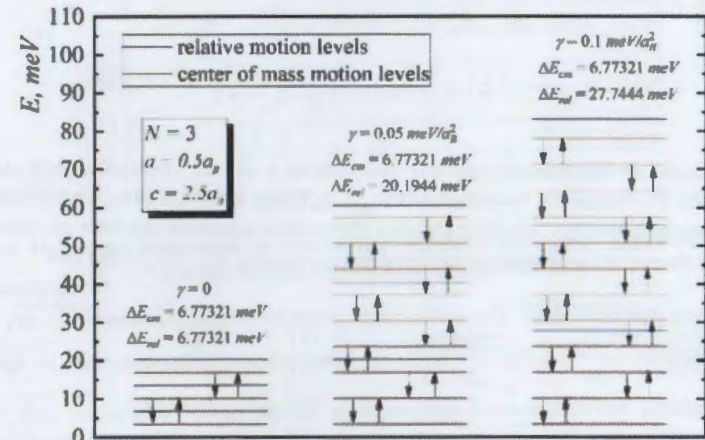


Рис. 8. Энергетическая диаграмма для трехчастичного газа:

I.  $\gamma = 0$ , II.  $\gamma = 0.05 \text{ meV} / a_B^2$ , III.  $\gamma = 0.1 \text{ meV} / a_B^2$ .

Как видно из Рис.8, с ростом параметра взаимодействия межуровневые расстояния относительного движения увеличиваются, тогда как расстояния между состояниями центра масс остаются неизменными. Ясно, что с увеличением параметра взаимодействия возникает картина энергетических диаграмм, при которой с каждым уровнем относительного движения будет связано семейство уровней центра масс. Этим и объясняется подзонный характер энергетических диаграмм. Таким образом, как в случае дырочного газа с учетом межчастичного взаимодействия, так и в случае, когда это взаимодействие отсутствует, под действием длинноволнового излучения имеют место дипольные переходы (между уровнями центра масс), определяемые одной и той же энергией, в чем и состоит суть обобщенной теоремы Кона.

В параграфе 2.4 изучен электронный газ в сильно-сплюснутой линзообразной КТ. По аналогии, с предыдущим случаем потенциал взаимодействия, рассмотрен на основе модели атома Мошинского (двумерное взаимодействие)

$$V_{int}(1, \dots, N) = \sum_{i < j}^N \gamma (|\vec{p}_i - \vec{p}_j|)^2 = \gamma \left( \sum_{i < j}^N (x_i - x_j)^2 + \sum_{i < j}^N (y_i - y_j)^2 \right). \quad (8)$$

Ясно, что двумерная модель может быть сведена к двум независимым одномерным моделям в радиальном направлении. Одномерные проблемы были

уже нами обсуждены в предыдущих параграфах и для энергетического спектра и волновых функций мы можем записать

$$\left\{ \begin{aligned} E_{n_m, \{n_i\}} &= 2NE_0 + \hbar\Omega_{n_m-1}(n_{cm} + n_{cm} + 1) + \hbar\Omega_{n_m-1} \sum_{i=2}^N (n_{i,1} + n_{i,2} + 1) \\ \psi(\zeta, \zeta_i) &= \frac{1}{\sqrt{2^{n_m} n_{cm}!}} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\zeta^2/2} H_{n_m}(\zeta) \prod_{i=2}^N \frac{1}{\sqrt{2^{n_i} n_{i,1}!}} \left(\frac{\tilde{\Omega}}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{\tilde{\Omega}}{2}\zeta_i^2} H_{n_i}(\sqrt{\tilde{\Omega}}\zeta_i) \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Как видно из Рис.9 межуровневое расстояние, в случае уровней центра масс, не зависит от параметра взаимодействия  $\gamma$  и числа частиц в газе. Соответственно, резонансная частота длинноволновых переходом в данной системе не зависит от числа частиц и характеризуется энергией переходов  $\Delta E = \hbar\Omega_{n_m-1} = 0.175 eV$ .

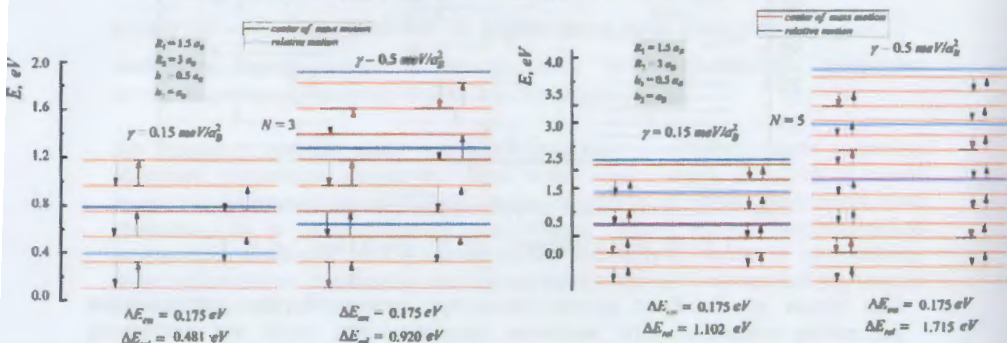


Рис. 9. Зонная диаграмма трехчастичного и пятичастичного электронного газов

В параграфе 2.5 изучен газ тяжелых дырок в сильно-сплюснутой линзообразной КТ. По аналогии, с предыдущим случаем потенциал взаимодействия, рассмотрен на основе двумерной модели атома Мошинского.

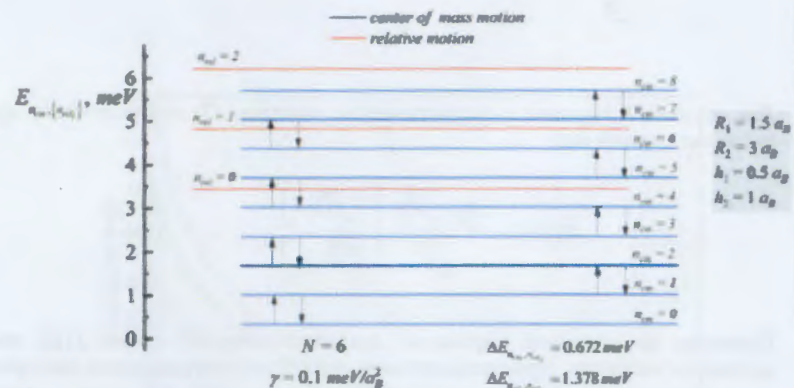


Рис. 10. Зонная диаграмма пятичастичного и шестичастичного дырочного газов для различных параметров взаимодействия

На Рис.10 показаны энергетические диаграммы для газа тяжелых дырок для  $N=6$  и параметрами взаимодействия  $\gamma = 0.01 \frac{meV}{a_B^2}$ ,  $\gamma = 0.1 \frac{meV}{a_B^2}$ . Отметим, что при всех значениях числа частиц и параметра взаимодействия межуровневое расстояние для движения центра масс является постоянной величиной и равно  $0.672 eV$ . Для случая относительного движения межуровневое расстояние увеличивается как с увеличением числа частиц, так и с увеличением параметра взаимодействия. В результате вышезложенного мы имеем подзонную структуру, где каждому уровню относительного движения соответствует семейство уровней центра масс.

Третья глава диссертационной работы посвящена изучению термодинамических свойств дырочных газов, рассмотренных во второй главе. Так были рассмотрены: средняя энергия, свободная энергия, энтропия и теплоемкость газа тяжелых дырок.

В параграфе 3.1 представлено введение в третью главу и дан обзор литературы, посвященной исследованиям несколькочастичных газов и термодинамическим свойствам газов в полупроводниковых КТ.

В параграфе 3.2 рассмотрен несколькочастичный газ тяжелых дырок, локализованный в сильно-вытянутой эллипсоидальной КТ. Решения данной задачи уже были даны во второй главе. Здесь же рассчитана статистическая сумма, в следующем виде

$$Z = \sum_{\nu} \exp(-\beta E_{\nu}), \quad (10)$$

где  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  – обратная температура,  $\nu$  – набор квантовых чисел.

Для изучаемой системы с энергетическим спектром (7) статистическая сумма имеет следующий вид

$$Z(N) = e^{-\frac{NE_0}{k_B T}} \frac{\frac{M\Omega}{2k_B T}}{e^{\frac{M\Omega}{k_B T}} - 1} \left( \frac{\frac{M\Omega}{2k_B T}}{e^{\frac{M\Omega}{k_B T}} - 1} \right)^{N-1}, \quad (11)$$

Принимая во внимание выражение для статистической суммы (11), можно вычислить основные термодинамические параметры системы, такие как средняя энергия  $\langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$ , свободная энергия  $\langle F \rangle = -\frac{\ln Z}{\beta}$ , энтропия  $S = -\frac{\partial \langle F \rangle}{\partial T}$  и теплоемкость  $C_V = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}$ .

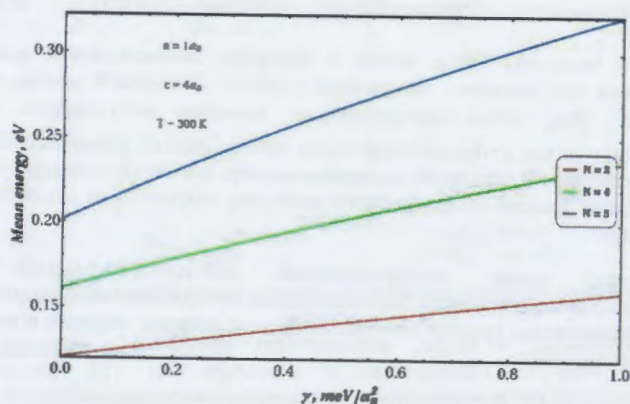


Рис. 11. Зависимость средней энергии газа тяжелых дырок от параметра взаимодействия при различном количестве частиц в газе

На Рис. 11 показана зависимость средней энергии газа тяжелых дырок от параметра взаимодействия при различном количестве частиц. Эффект взаимодействия приводит к росту средней энергии газа, при этом расчёты показывают, что данный вклад существеннее чем температурный.

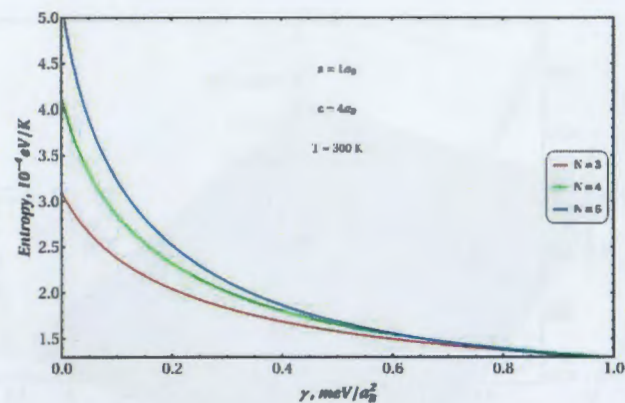


Рис. 12. Зависимость энтропии газа тяжелых дырок от параметра взаимодействия при различном количестве частиц в газе

На Рис. 12 показаны зависимости энтропии газа тяжелых дырок от параметра взаимодействия при различных значениях числа частиц. При увеличении числа частиц наблюдается резкий рост энтропии. С другой стороны, рост параметра взаимодействия приводит к существенному снижению энтропии в начале и последующему насыщению при относительно больших межчастичных взаимодействиях ( $\gamma > 1$ ), тем самым упорядочивая и стабилизируя.

В параграфе 3.2 рассмотрен неколечастичный газ тяжелых дырок, локализованный в сильно-сплюснутой линзообразной КТ Ge/Si. Аналогично предыдущему случаю для статистической суммы имеем

$$Z(N) = \frac{e^{-\frac{2NE_0}{k_B T}}}{\left( e^{\frac{M\Omega}{k_B T}} - 1 \right) \left( e^{\frac{M\Omega}{k_B T}} - 1 \right)^{N-1}}. \quad (12)$$

На Рис.13 представлена зависимость средней энергии дырочного газа от геометрии КТ. Рост высоты линзообразной КТ приводит к резкому спаду средней энергии так как уменьшается и энергия размерного квантования в аксиальном направлении, в результате чего уровни энергии располагаются ниже. При этом когда  $h_2 = h_1$ , мы наблюдаем фазовый переход второго рода, обусловленный перераспределением частиц в газе, когда в результате увеличения нижней области локализации частиц, мы наблюдаем отток частиц из верхней области в нижнюю. (Рис.14)

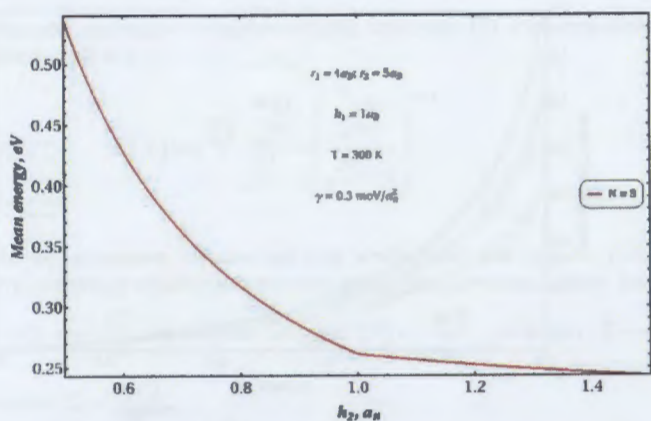


Рис. 13. Зависимость средней энергии трехчастичного парно-взаимодействующего газа тяжелых дырок от высоты КТ



Рис. 14. Сечение линзообразной КТ. Перераспределение частиц при изменении высоты КТ.

На Рис.15 представлена 3D зависимость энтропии дырочного газа от числа частиц и параметра взаимодействия. Из рисунка следует, энтропия минимальна при минимальном количестве частиц и резко возрастает при их увеличении. Взаимодействия же приводит к резкому спаду энтропии и при дальнейшем увеличении параметра взаимодействия система упорядочивается и стабилизируется, и вследствие этого энтропия насыщается.

На Рис.16 показаны зависимости теплоемкости дырочного газа от температуры. Вклад взаимодействия (при постоянной температуре) в теплоемкость отрицательный, и теплоемкость падает, так как с ростом параметра взаимодействия  $\gamma$ , частицы чувствуют друг друга лучше и теплообмен становится более интенсивным. Эффект же температуры, противоположный, с ростом температуры и числа частиц мы наблюдаем рост теплоемкости, так как при температуре 300 K, системе необходимо дать больше тепла чтобы повысить ее температуру на 1 K, чем при температуре 200 K.

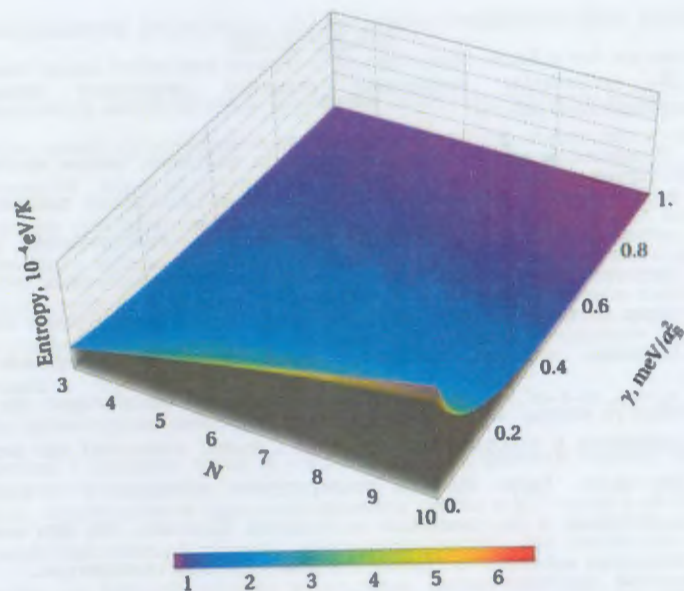


Рис. 15. Зависимость энтропии парно-взаимодействующего газа тяжелых дырок от числа частиц и параметра взаимодействия

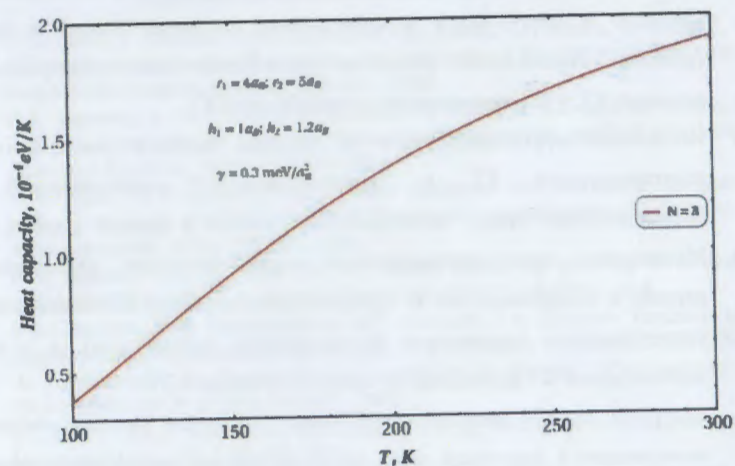


Рис. 16. Зависимость теплоемкости парно-взаимодействующего газа тяжелых дырок от температуры

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении представим основные результаты предлагаемой диссертационной работы:

1. В рамках адиабатического приближения построена теория межзонного и внутризонного магнетопоглощений в сильно-сплюснутой двояковыпуклой асимметричной линзообразной КТ. Получен аналитический вид для энергетического спектра и волновых функций одночастичных состояний, а также выявлены правила отбора для межзонных и внутризонных переходов. Показано, что для квантовых чисел имеют место правила отбора  $n_z \rightarrow n'_z, m \rightarrow -m', n_x \rightarrow n'_x$ . С ростом магнитного поля порог поглощения смещается в коротковолновую область (синее смещение) для межзонных переходов. Также изучены температурные зависимости коэффициентов межзонного и внутризонного поглощений. Показано, что при межзонных переходах наблюдается красное смещение с ростом температуры.
2. Изучены зависимости коэффициентов генерации второй и третьей гармоник от энергии падающего света. Расчеты сделаны при различных значениях внешнего магнитного поля и размеров КТ. Рост внешнего магнитного поля приводит к спаду пиков коэффициентов генерации второй и третьей гармоник. Аналогичное поведение показывают пики при увеличении размеров КТ, в частности высоты линзообразной КТ.
3. Исследован электронный газ и газ тяжелых дырок в сильно-вытянутой эллипсоидальной КТ и сильно-сплюснутой линзообразной КТ. Взаимодействие между частицами газа учтено в рамках модели атома Мошинского, когда взаимодействие между частицами рассматривается парным и осцилляторным. В случае эллипсоидальной КТ взаимодействие рассматривается одномерным (в аксиальном направлении), а в случае линзообразной КТ двумерным (в плоскости сечения КТ).
4. Построена модель длинноволнового поглощения для несколькочастичного электронного и дырочного газов, когда на систему падает длинноволновое возбуждение с электрической компонентой  $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$ . Показано, что с учетом межчастичного взаимодействия, так и в случае, когда это

взаимодействие отсутствует, под действием длинноволнового излучения имеют место дипольные переходы, определяемые одной и той же частотой, что является доказательством реализации обобщенной теоремы Кона.

5. Рассмотрены термодинамические характеристики дырочного газа в сильно-вытянутой эллипсоидальной и сильно-сплюснутой линзообразной КТ. Изучены температурные зависимости средней энергии, свободной энергии, энтропии и теплоемкости газа. Показано, что учет взаимодействия приводит к росту средней и свободной энергий, а также упорядочиванию системы, в результате чего с ростом параметра взаимодействия энтропия системы падает.
6. При рассмотрении зависимости средней и свободной энергии от высоты КТ, начиная с момента когда  $h_2 = h_1$ , наблюдается фазовый переход первого рода, обусловленный перераспределением частиц в КТ, когда в результате увеличения нижней области локализации частиц, мы наблюдаем отток частиц из верхней области в нижнюю, сопровождаемый уменьшением эффекта размерного квантования.

## СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. E.A. Zibik, T. Grange, B.A. Carpenter, N.E. Porter, R. Ferreira, G. Bastard, L.R. Wilson. Long lifetimes of quantum-dot intersublevel transitions in the terahertz range. *Nature materials*, 8(10), 803-807, 2009.
2. R.R. Leyman, A. Gorodetsky, N. Bazieva, G. Molis, A. Krotkus, E. Clarke, E.U. Rafailov. Quantum dot materials for terahertz generation applications. *Laser & Photonics Reviews*, 10(5), 772-779, 2016.
3. W.E. Kerr, A. Pancholi, V.G. Stoleru. Quantum dot molecules: A potential pathway towards terahertz devices. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 35(1), 139-145, 2006.
4. B.A. Burnett, B.S. Williams. Density matrix model for polarons in a terahertz quantum dot cascade laser. *Physical Review B*, 90(15), 155309, 2014.
5. I.Y. Chestnov, V.A. Shahnazaryan, A.P. Alodjants, I.A. Shelykh. Terahertz lasing in ensemble of asymmetric quantum dots. *Acs Photonics*, 4(11), 2726-2737, 2017.
6. A. Franceschetti, A. Zunger. Optical transitions in charged CdSe quantum dots. *Physical Review B*, 62(24), R16287, 2000.
7. J. Chen, W. Du, J. Shi, M. Li, Y. Wang, Q. Zhang, X. Liu. Perovskite quantum dot lasers. *InfoMat*, 2(1), 170-183, 2020.
8. S. Nagaraja, J.P. Leburton, R.M. Martin. Electronic properties and spin polarization in coupled quantum dots. In *Physical Models for Quantum Dots*. Jenny Stanford Publishing, 2021.

9. H.A. Sarkisyan, D.B. Hayrapetyan, L.S. Petrosyan, E.M. Kazaryan, A.N. Sofronov, R.M. Balagula, A.A. Tonkikh. Realization of the Kohn's theorem in Ge/Si quantum dots with hole gas: Theory and experiment. *Nanomaterials*, 9(1), 56, 2019.
10. H.T. Ghaltaghchyan, D.B. Hayrapetyan, E.M. Kazaryan, H.A. Sarkisyan. Few-body magneto-absorption in prolate ellipsoidal quantum dot. *Physics of Atomic Nuclei*, 80, 769-773, 2017.
11. S. Gumber, M. Kumar, M. Gambhir, M. Mohan, P.K. Jha. Thermal and magnetic properties of cylindrical quantum dot with asymmetric confinement. *Canadian Journal of Physics*, 93(11), 1264-1268, 2015.
12. H.T. Ghaltaghchyan, D.B. Hayrapetyan, E.M. Kazaryan, H.A. Sarkisyan. The electron gas in the core/shell cylindrical quantum dot: Thermodynamic and diamagnetic properties. *Micro and Nanostructures*, 174, 207471, 2023.
13. A.A. Alia, M.K. Elsaid, A. Shaer. Magnetic properties of GaAs parabolic quantum dot in the presence of donor impurity under the influence of external tilted electric and magnetic fields. *Journal of Taibah University for Science*, 13(1), 687-695, 2019.
14. S. Gumber, M. Kumar, M. Gambhir, P.K. Jha, M. Mohan. Thermodynamic behaviour of Rashba quantum dot in the presence of magnetic field. *Chinese Physics B*, 25(5), 056502, 2016.
15. B. Boyacioglu, A. Chatterjee. Dia-and paramagnetism and total susceptibility of GaAs quantum dots with Gaussian confinement. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 44(9), 1826-1831, 2012.
16. M. Moshinsky. How good is the Hartree-Fock approximation. *Am. J. Phys*, 36, 52-53, 1968.
17. N. Johnson, M. Payne. Exactly solvable model of interacting particles in a quantum dot. *Physical review letters*, 67(9), 1157, 1991.
18. P.A. Maksym, T. Chakraborty. Quantum dots in a magnetic field: Role of electron-electron interactions. *Physical review letters*, 65(1), 108, 1990.
19. F.M. Peeters. Magneto-optics in parabolic quantum dots. *Physical Review B*, 42(2), 1486, 1990.
20. A.O. Govorov, A.V. Chaplik. Magnetoabsorption at quantum points. *matrix*, 21(2), 5, 1990.
21. D.B. Hayrapetyan, E.M. Kazaryan, H.A. Sarkisyan. Implementation of Kohn's theorem for the ellipsoidal quantum dot in the presence of external magnetic field. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 75, 353-357, 2016.
22. D.B. Hayrapetyan, L.S. Petrosyan, E.M. Kazaryan, H.A. Sarkisyan. Electron gas in asymmetric biconvex thin quantum lens: realization of Kohn's theorem. Ученые записки Ереванского государственного университета, серия Физические и Математические науки, 51(1), 109-112, 2017.

## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. D.B. Hayrapetyan, E.M. Kazaryan, M.A. Mkrtchyan, H.A. Sarkisyan. Long-wave absorption of Few-Hole gas in prolate ellipsoidal Ge/Si quantum dot: implementation of analytically solvable Moshinsky model. *Nanomaterials*, 10(10), 1896, 2020.
2. M.A. Mkrtchyan, D.B. Hayrapetyan, E.M. Kazaryan, H.A. Sarkisyan, D.A. Firsov, M.Y. Vinnichenko. Implementation of Moshinsky Atom Model for Electron Gas in Quantum Dots. In *International Youth Conference on Electronics, Telecommunications and Information Technologies: Proceedings of the YETI 2020, St. Petersburg, Russia. Springer International Publishing*, 169-175, 2021.
3. M.A. Mkrtchyan, D.B. Hayrapetyan, E.M. Kazaryan, H.A. Sarkisyan, M.Y. Vinnichenko, V.A. Shalygin, D.A. Firsov, L.S. Petrosyan. Effects of an external magnetic field on the interband and intraband optical properties of an asymmetric biconvex lens-shaped quantum dot. *Nanomaterials*, 12(1), 60, 2022.
4. M.A. Mkrtchyan. Interband Absorption in Asymmetric Biconvex Lens-Shaped Quantum Dot. In *International Youth Conference on Electronics, Telecommunications and Information Technologies: Proceedings of the YETI 2021, St. Petersburg, Russia. Springer International Publishing*, 357-362, 2022.
5. M.A. Mkrtchyan, D.B. Hayrapetyan, E.M. Kazaryan, H.A. Sarkisyan, S. Baskoutas, D.A. Firsov, M.Y. Vinnichenko. One-and few-particle optics of the valence band in lens-shaped Ge/Si quantum dots. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 150, 115703, 2022.
6. M.A. Mkrtchyan, E.M. Kazaryan, H.A. Sarkisyan, M.Y. Vinnichenko, D.A. Firsov. Long-wavelength optics of a pair-interacting electron gas in a lens-shaped quantum dot: two-dimensional Moshinsky model. *Optical Memory and Neural Networks. Springer Publishing*. 32(4), 2023 (будет опубликована).
7. M.A. Mkrtchyan, Е.Ш. Мамасахлисов, А.А. Саркисян. Парно-взаимодействующий газ тяжелых дырок в сильно-вытянутой эллипсоидальной квантовой точке: термодинамические свойства. *Journal of Contemporary Physics (Armenian Academy of Sciences)*, 2023 (принята к печати).

## ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

1. Աղիարատական մոտավորության շրջանակներում կառուցվել է միջգոտիական և ներգոտիական մագնիսական կլանումների տեսությունը խիստ սեղմված երկուռուցիկ անհամաչափ ոսպնյակաձև քվանտային կետում (ՔԿ): Ստացվել են մեկմասնիկային վիճակների ալիքային ֆունկցիաների և էներգիական սպեկտրի վերլուծական տեսքերը ինչպես նաև

- դուրս են բերվել միջգոտիական և ներգոտիական անցումների համար ջոկման կանոնները: Յույց է տրվել, որ քվանտային թվերի համար տեղի ունեն հետևյալ կանոնները՝  $n_z \rightarrow n'_z, m \rightarrow -m', n_x \rightarrow n'_x$ : Մագնիսական դաշտի աճին զուգնթաց կլանման եզրը միջգոտիական անցումների համար շեղվում է դեպի կարճալիքային տիրույթ (կապույտ շեղում): Ուսումնասիրվել են նաև միջգոտիական և ներգոտիական կլանման գործակիցների ջերմաստիճանային կախվածությունները: Յույց է տրվել, որ միջգոտիական անցումների դեպքում նկատվում է կարմիր շեղում ջերմաստիճանի աճի հետ:
2. Ուսումնասիրվել են երկրորդ և երրորդ հարմոնիկի գեներացիայի գործակիցները՝ կախված ընկնող լույսի էներգիայից: Հաշվարկներն արվել են արտաքին մագնիսական դաշտի և ՔԿ-ի չափերի տարբեր արժեքների համար: Արտաքին մագնիսական դաշտի աճը բերում է երկրորդ և երրորդ հարմոնիկի գեներացիայի գործակիցների գագաթների նվազման: Նմանօրինակ վարք կարելի է նկատել ՔԿ-ի չափերի աճի դեպքում մասնավորապես ուսայնակաձև ՔԿ-ի բարձրության դեպքում:
  3. Ուսումնասիրվել են էլեկտրոնային գազը և ծանր խոռոչների գազը խիստ ձգված էլիպսարդային և խիստ սեղմված ուսայնակաձև ՔԿ-երում: Գազի միջմասնիկային փոխազդեցությունը հաշվի է առնվել Մոշինսկու առոմի մոդելի շրջանակում, երբ միջմասնիկային փոխազդեցությունը դիտարկվում է որպես զույգ և օսցիլյատորային: Էլիպսարդային ՔԿ-ի դեպքում փոխազդեցությունը դիտարկվում է որպես միաչափ (աքսիալ ուղղությամբ), իսկ ուսայնակաձև ՔԿ-ի դեպքում՝ երկչափ (ՔԿ-ի հարթության հատման ուղղությամբ):
  4. Կառուցվել է երկարալիքային կլանման մոդելը մի քանի մասնիկային էլեկտրոնային և խոռոչային գազերի համար, երբ համակարգի վրա ընկնում է երկարալիքային ազդեցություն  $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$  էլեկտրական բաղադրիչով: Յույց է տրված, որ ինչպես միջմասնիկային փոխազդեցության առկայության, այնպես էլ դրա բացակայության դեպքում երկարալիքային ճառագայթման ազդեցության տակ ի հայտ են գալիս դիպոլային անցումներ, որոնք որոշվում են նույն հաճախությամբ, ինչը համարվում է Կոնի ընդհանրացված թեորեմի իրականացման սպացույց:

5. Դիտարկվել են խոռոչային գազի թերմոդինամիկական բնութագրերը խիստ ձգված էլիպսարդային և խիստ սեղմված ուսայնակաձև ՔԿ-երում: Ուսումնասիրվել են գազի միջին էներգիայի, ազատ էներգիայի, էնտրոպիայի և ջերմունակության ջերմաստիճանային կախվածությունները: Յույց է տրվել, որ փոխազդեցության հաշվի առնումը բերում է միջին և ազատ էներգիաների աճի ինչպես նաև համակարգի կարգավորմանը, ինչի արդյունքում փոխազդեցության պարամետրի աճին զուգնթաց համակարգի էնտրոպիան նվազում է:
6. Միջին և ազատ էներգիաների՝ ՔԿ-ի բարձրությունից դիտարկվող կախվածություններում  $h_2 = h_1$  պահից սկսած նկատվում է առաջին կարգի ֆազային անցում, պայմանավորված ՔԿ-ում մասնիկների վերաբաշխմամբ, երբ մասնիկների տեղայնացման ներքևի տիրույթի մեծացման արդյունքում նկատվում է մասնիկների արտահոսք վերևի տիրույթից ներքևի տիրույթ:

## CONCLUSION

1. In the frame of the adiabatic approximation, a theory of interband and intraband magnetoabsorption in a strongly oblate biconvex asymmetric lens-shaped QD is constructed. An analytical form for the energy spectrum and wave functions of single-particle states are obtained, and selection rules for interband and intraband transitions are identified. It is shown that selection rules for quantum numbers  $n_z \rightarrow n'_z, m \rightarrow -m', n_x \rightarrow n'_x$  take place. With increasing magnetic field, the absorption threshold shifts to short wavelengths (blue shift) for interband transitions. The temperature dependences of the interband and intraband absorption coefficients were also studied. The interband transitions red shift with increasing temperature is observed.
2. The dependences of the second and third harmonics generation coefficients on the energy of the incident light were studied. Calculations were made for different values of the external magnetic field and QD sizes. An increase in the external magnetic field leads to a decrease in the peaks of the second and

third harmonic generation coefficients. Peaks show similar behavior with increasing QD dimensions, in particular the height of the lens-shaped QD.

3. Electron gas and heavy holes gas in a strongly prolate ellipsoidal QD and a strongly oblate lens-shaped QD were studied. The interaction between particles is taken into account within the framework of the Moshinsky atom model, when the interaction between particles is considered paired and oscillatory. In the case of an ellipsoidal QD, the interaction is considered one-dimensional (in the axial direction), and in the case of a lens-shaped QD, it is considered two-dimensional (in the plane of the QD section).
4. A model of long-wave absorption is constructed for few-particle electron and hole gases when a long-wave excitation with an electrical component  $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$  is incident on the system. It is shown that, taking into account the interparticle interaction, and in the case when this interaction is absent, under the influence of long-wave radiation, dipole transitions take place, determined by the same frequency, which is proof of the implementation of the generalized Kohn theorem.
5. The thermodynamic characteristics of a holes gas in a strongly prolate ellipsoidal and strongly oblate lens-shaped QDs are considered. The temperature dependences of the mean energy, free energy, entropy and heat capacity of the gas were studied. It is shown that taking into account the interaction leads to an increase in the mean and free energies, as well as ordering of the system, as a result of which, as the interaction parameter increases, the entropy of the system decreases.
6. When considering the dependence of the mean and free energy on the height of the QD, starting from the moment when  $h_2 = h_1$ , a first-order phase transition is observed, caused by the redistribution of particles in the QD, when, as a result of an increase in the lower region of particle localization, we observe an outflow of particles from the upper region to the lower.